3 Algorithms for Product-Form Queueing Networks

Convolution Algorithm:

- ➤ ***A*, *B*, *C*** are vectors of the length $K + 1$
- ➤ Convolution $\boldsymbol{C}$ of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \breve{\otimes} \boldsymbol{B}:$$

$$C(k) = \sum_{j=0}^{k} A(j) \cdot B(k-j)\,, \quad k = 0, \ldots, K\,.$$

- ➤ The normalization constant is determined by the convolution of two vectors.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Product-form solution:

$$\pi(k_1, \ldots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

Normalization constant:

$$G(K) = \sum_{\sum_{i=1}^{N} k_i = K} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Definition:

$$G_n(k) = \sum_{\sum_{i=1}^{n} k_i = k} \prod_{i=1}^{n} F_i(k_i)$$

Normalization constant:

$$G(K) = G_N(K)$$

It can be shown, that:

$$G_n(k) = \sum_{j=0}^{k} F_n(j) \cdot G_{n-1}(k-j)$$

G_n is the convolution of F_n and G_{n-1}

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Convolution algorithm to calculate the normalization constant:

	1	$\cdots$	$n-1$		n	$\cdots$	N
0	1	$\ldots$	$G_{n-1}(0)(\cdot F_n(k))$		1		$1 = G(1)$
1	$F_1(1)$	$\ldots$	$G_{n-1}(1)(\cdot F_n(k-1))$		$G_n(1)$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
$k-1$	$F_1(k-1)$	$\ldots$	$G_{n-1}(k-1)(\cdot F_n(1))$	$\sum$			
k	$F_1(k)$	$\ldots$	$G_{n-1}(k)(\cdot F_n(0))$	$\rightarrow$	$G_n(k)$	$\cdots$	$G_N(k) = G(k)$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$		
K	$F_1(K)$				$G_n(K)$		$G_N(K) = G(K)$

Initial conditions:

$$G_1(k) = F_1(k), \quad k = 1, \ldots, K$$

$$G_n(0) = 1, \quad n = 1, \ldots, N$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Calculation of the performance measures from the normalization constant:

➤ **Marginal probabilities**:

$$\pi_i(k) = \frac{F_i(k)}{G(K)} \cdot G_N^{(i)}(K-k)$$

$G_N^{(i)}$ Normalizing constant of a network with k jobs wthout node i.

$G_N^{(i)}$ can be calculated iteratively:

$$G_N^{(i)}(k) = G(k) - \sum_{j=1}^{k} F_i(j) \cdot G_N^{(i)}(k-j)$$

Initial conditions:

$$G_N^{(i)}(0) = G(0) = 1\,, \quad i = 1, \ldots, N$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

$m_i = 1$:

$$\pi_i(k) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{1}{G(K)} \cdot \left(G(K-k) - \frac{e_i}{\mu_i} \cdot G(K-k-1)\right)$$

➤ **Throughput**:

$$\lambda(K) = \frac{G(K-1)}{G(K)} \quad \text{und} \quad \lambda_i(K) = e_i \cdot \frac{G(K-1)}{G(K)}$$

➤ **Utilization**:

$$\rho_i = \frac{e_i}{m_i \mu_i} \cdot \frac{G(K-1)}{G(K)}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ **Mean number of jobs:**

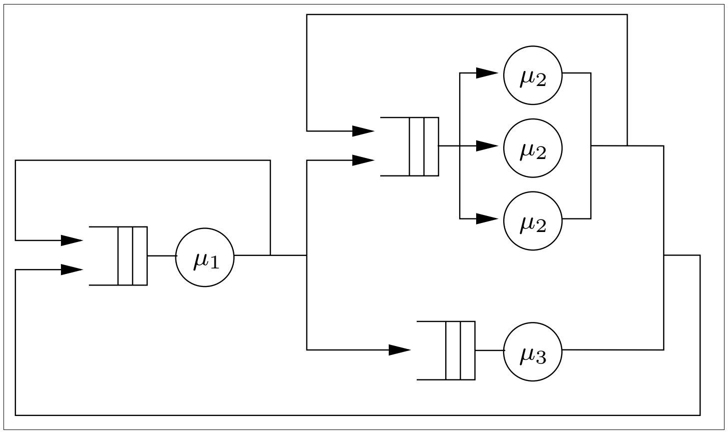
$$\overline{K}_i = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{G(K)}$$

➤ **Mean response time** (mit Little):

$$\overline{T}_i = \frac{\overline{K}_i}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{e_i \cdot G(K-1)}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Example: Closed queueing network with only one job class:



➤ Number of nodes: N =3

➤ Number of jobs: K = 3

➤ Number of servers in the node:

$m_1 = 2; \quad m_2 = 3; \quad m_3 = 1$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Service rates: $\mu_1 = 0.8$/sec; $\mu_2 = 0.6$/sec; $\mu_3 = 0.4$/sec

➤ Visit ratios: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.667$; $e_3 = 0.2$

Performance measures:

- Functions $F_i(k_i)$:

$$\begin{aligned}
&F_1(0) = \underline{1}, && F_2(0) = \underline{1}, && F_3(0) = \underline{1},\\
&F_1(1) = \underline{1.25}, && F_2(1) = \underline{1.111}, && F_3(1) = \underline{0.5},\\
&F_1(2) = \underline{0.781}, && F_2(2) = \underline{0.617}, && F_3(2) = \underline{0.25},\\
&F_1(3) = \underline{0.488}, && F_2(3) = \underline{0.229}, && F_3(3) = \underline{0.125}.
\end{aligned}$$

- Normalizing constant:

	1	2	N=3
0	1	1	1
1	1.25	2.361	2.861
2	0.781	2.787	4.218
K=3	0.488	2.356	4.465

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- Marginal probabilities:
  - ➤ Node 3:

$$\pi_3(0) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^0 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(3) - \frac{e_3}{\mu_3} G(2)\right) = \underline{0.528},$$

$$\pi_3(1) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^1 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(2) - \frac{e_3}{\mu_3} G(1)\right) = \underline{0.312},$$

$$\pi_3(2) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(1) - \frac{e_3}{\mu_3} G(0)\right) = \underline{0.132},$$

$$\pi_3(3) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^3 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(0) - \frac{e_3}{\mu_3} \cdot 0\right) = \underline{0.028}.$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Node 1 and node 2:

Iterative calculation of der $G_N^{(i)}$:

$$G_N^{(1)}(0) = \underline{1}\,,$$
$$G_N^{(1)}(1) = G(1) - F_1(1)G_N^{(1)}(0) = \underline{1.611}\,,$$
$$G_N^{(1)}(2) = G(2) - (F_1(1)G_N^{(1)}(1) + F_1(2)G_N^{(1)}(0)) = \underline{1.423}\,,$$
$$G_N^{(1)}(3) = G(3) - (F_1(1)G_N^{(1)}(2) + F_1(2)G_N^{(1)}(1) + F_1(3)G_N^{(1)}(0)) = \underline{0.940}\,.$$

Corresponding:

$$G_N^{(2)}(0) = \underline{1}\,, \quad G_N^{(2)}(1) = \underline{1.656}\,, \quad G_N^{(2)}(2) = \underline{1.75}\,, \quad G_N^{(2)}(3) = \underline{1.316}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

Marginal probabilities:

$$\pi_1(0) = \frac{F_1(0)}{G(3)}G_N^{(1)}(3) = \underline{0.211}\,, \quad \pi_1(1) = \frac{F_1(1)}{G(3)}G_N^{(1)}(2) = \underline{0.398}\,,$$
$$\pi_1(2) = \frac{F_1(2)}{G(3)}G_N^{(1)}(1) = \underline{0.282}\,, \quad \pi_1(3) = \frac{F_1(3)}{G(3)}G_N^{(1)}(0) = \underline{0.109}\,,$$

$$\pi_2(0) = \underline{0.295}\,, \quad \pi_2(1) = \underline{0.412}\,, \quad \pi_2(2) = \underline{0.242}\,, \quad \pi_2(3) = \underline{0.051}$$

- Throughputs:

$$\lambda_1 = e_1\frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.945}\,, \quad \lambda_2 = e_2\frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.630}\,, \quad \lambda_3 = e_3\frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.189}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- Utilizations:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1\mu_1} = \underline{0.590}\,, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2\mu_2} = \underline{0.350}\,, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \underline{0.473}$$

- Mean number of jobs in the nodes:

$$\overline{K}_1 = \pi_1(1) + 2\pi_1(2) + 3\pi_1(3) = \underline{1.290}\,,$$
$$\overline{K}_2 = \pi_2(1) + 2\pi_2(2) + 3\pi_2(3) = \underline{1.050}\,,$$

$$\overline{K}_3 = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)\frac{G(2)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^2\frac{G(1)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^3\frac{G(0)}{G(3)} = \underline{0.660}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

Mean Value Analysis (MVA):

- Fundamental laws:

  - Little's law:

$$\overline{K} = \lambda\cdot\overline{T}$$

  - Arrival theorem:

$$\overline{T}_i(K) = \frac{1}{\mu_i}\cdot\left[1 + \overline{K}_i(K-1)\right]\,, \qquad i = 1, \ldots, N$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Algorithm:

- ***Step*** 1: Initialization:

$$i = 1, \dots, N \text{ und } j = 1, \dots, (m_i - 1)$$

$$\overline{K}_i(0) = 0, \quad \pi_i(0 \mid 0) = 1, \quad \pi_i(j \mid 0) = 0$$

- ***Step*** 2: Iteration over the number of jobs: $k = 1, \dots, K$.

  ➤ *Step* 2.1: Compute the mean response time at the nodes $i = 1, \dots, N$ (Arrival theorem):

$$\overline{T}_i(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_i}\left[1 + \overline{K}_i(k-1)\right], & \text{Type-1,2,4 } (m_i = 1), \\ \dfrac{1}{\mu_i \cdot m_i}\left[1 + \overline{K}_i(k-1) + \sum_{j=0}^{m_i-2}(m_i - j - 1)\cdot \pi_i(j \mid k-1)\right], & \text{Type-1 } (m_i > 1), \\ \dfrac{1}{\mu_i}, & \text{Type-3}, \end{cases}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

  ➤ *Step* 2.2: Compute the overall throughput (Little):

$$\lambda(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^{N} e_i \cdot \overline{T}_i(k)}$$

Compute the throughputs of the nodes $i = 1, \dots, N$:

$$\lambda_i(k) = e_i \cdot \lambda(k)$$

  ➤ *Step* 2.3: Compute the mean number of jobs at the nodes $i = 1, \dots, N$ (Little):

$$\overline{K}_i(k) = e_i \cdot \lambda(k) \cdot \overline{T}_i(k)$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ to Step 2.1:

Marginal probabilities for nodes of Type-1 ($m_i > 1$):

$$\pi_i(j \mid k) = \frac{\lambda_i(k)}{\mu_i \cdot j} \cdot \pi_i(j-1 \mid k-1)$$

with:

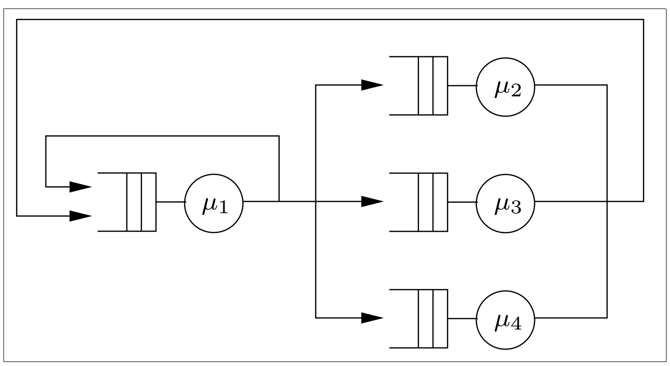
$$\pi_i(0 \mid k) = 1 - \frac{1}{m_i} \cdot \left(\frac{e_i \cdot \lambda(k)}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{m_i - 1} (m_i - j) \cdot \pi_i(j \mid k) \right)$$

Initial conditions:

$$\pi_i(0 \mid 0) = 1, \quad \pi_i(j \mid 0) = 0$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ **Example**:



➤ Number of nodes: $N = 4$

➤ Number of jobs: $K = 6$

➤ Node type for all nodes: M/M/1- FCFS

➤ Visit ratios: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.4$; $e_3 = 0.2$; $e_4 = 0.1$

➤ Service rates: $\mu_1 = 50$; $\mu_2 = 5$; $\mu_3 = 2.5$; $\mu_4 = 1.667$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- ***Step*** 1: Initialization:

$$\overline{K}_1(0) = \overline{K}_2(0) = \overline{K}_3(0) = \overline{K}_4(0) = 0$$

- ***Step*** 2: Iteration over the number of jobs in the network:

Iteration for ***k*** = 1:

➤ *Step* 2.1: Mean response times (Arrival theorem):

$$\overline{T}_1(1) = \frac{1}{\mu_1}\left[1 + \overline{K}_1(0)\right] = \underline{0.02}\,, \quad \overline{T}_2(1) = \frac{1}{\mu_2}\left[1 + \overline{K}_2(0)\right] = \underline{0.2}\,,$$
$$\overline{T}_3(1) = \frac{1}{\mu_3}\left[1 + \overline{K}_3(0)\right] = \underline{0.4}\,, \quad \overline{T}_4(1) = \frac{1}{\mu_4}\left[1 + \overline{K}_4(0)\right] = \underline{0.6}\,.$$

➤ *Step* 2.2: Throughput (Little):

$$\lambda(1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} e_i \overline{T}_i(1)} = \underline{4.167}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ *Step* 2.3: Mean number of jobs (Little):

$$\overline{K}_1(1) = \lambda(1)\overline{T}_1(1)e_1 = \underline{0.083}\,, \quad \overline{K}_2(1) = \lambda(1)\overline{T}_2(1)e_2 = \underline{0.333}\,,$$
$$\overline{K}_3(1) = \lambda(1)\overline{T}_3(1)e_3 = \underline{0.333}\,, \quad \overline{K}_4(1) = \lambda(1)\overline{T}_4(1)e_4 = \underline{0.25}\,.$$

Iteration for ***k*** = 2:

➤ *Step* 2.1: Mean response times:

$$\overline{T}_1(2) = \frac{1}{\mu_1}\left[1 + \overline{K}_1(1)\right] = \underline{0.022}\,, \quad \overline{T}_2(2) = \frac{1}{\mu_2}\left[1 + \overline{K}_2(1)\right] = \underline{0.267}\,,$$
$$\overline{T}_3(2) = \frac{1}{\mu_3}\left[1 + \overline{K}_3(1)\right] = \underline{0.533}\,, \quad \overline{T}_4(2) = \frac{1}{\mu_4}\left[1 + \overline{K}_4(1)\right] = \underline{0.75}\,.$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ *Step* 2.2: Throughput:

$$\lambda(2) = \frac{2}{\sum_{i=1}^{4} e_i \overline{T}_i(2)} = \underline{6.452}$$

➤ *Schritt* 2.3: Mean number of jobs:

$$\overline{K}_1(2) = \lambda(2)\overline{T}_1(2)e_1 = \underline{0.140}\,, \quad \overline{K}_2(2) = \lambda(2)\overline{T}_2(2)e_2 = \underline{0.688}\,,$$
$$\overline{K}_3(2) = \lambda(2)\overline{T}_3(2)e_3 = \underline{0.688}\,, \quad \overline{K}_4(2) = \lambda(2)\overline{T}_4(2)e_4 = \underline{0.484}\,.$$
$$\vdots$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ After six steps, the iteration stops and we get the final results:

Node	1	2	3	4
Mean response time $\overline{T}_i$	0.025	0.570	1.140	1.244
Throughput λ_i	9.920	3.968	1.984	0.992
Mean number of jobs $\overline{K}_i$	0.244	2.261	2.261	1.234
Utilization ρ_i	0.198	0.794	0.794	0.595

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

MVA for Multiclass Closed Networks:

$$\overline{T}_{ir}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{ir}}\left[1 + \sum\limits_{s=1}^{R} \overline{K}_{is}(\mathbf{k} - \mathbf{1}_r)\right] & \text{Type-1,2,4 } (m_i = 1), \\ \dfrac{1}{\mu_{ir} \cdot m_i}\left[1 + \sum\limits_{s=1}^{R} \overline{K}_{is}(\mathbf{k} - \mathbf{1}_r) \right. \\ \qquad \left. + \sum\limits_{j=0}^{m_i - 2} (m_i - j - 1)\pi_i(j \mid \mathbf{k} - \mathbf{1}_r)\right], & \text{Type-1 } (m_i > 1), \\ \dfrac{1}{\mu_{ir}}, & \text{Type-3.} \end{cases}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

MVA for Queueing Networks with Load-Dependent Service Rates:

$$\overline{T}_i(k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\mu_i(j)} \pi_i(j - 1 \mid k - 1)$$

with:

$$\pi_i(j \mid k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(k)}{\mu_i(j)} \pi_i(j - 1 \mid k - 1) e_i\,, & \text{for } j = 1, \ldots, k, \\ 1 - \sum\limits_{l=1}^{k} \pi_i(l \mid k)\,, & \text{for } j = 0. \end{cases}$$

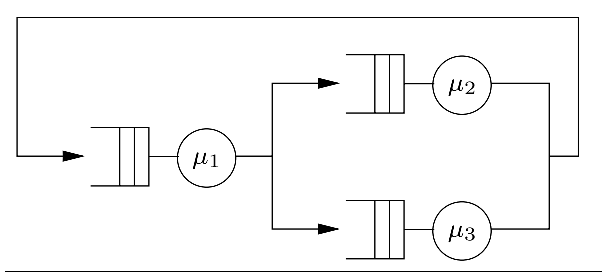
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

FES-Method (Flow-Equivalent-Server-Method):

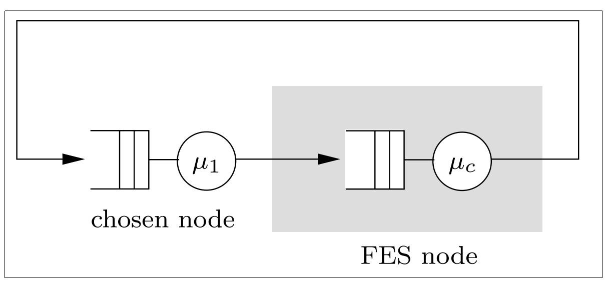
◆ **Algorithm**:

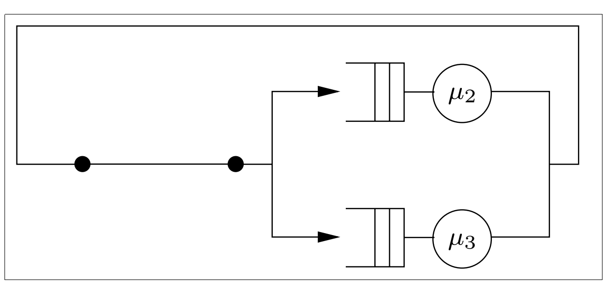
- ***Step*** 1:

In the given network, choose a node i and short-circuit it by setting the mean service time in that node to zero. Compute the throughputs $\lambda_i^{sc}(k)$ along the short circuit, as a function of the number of jobs $k = 1, \ldots, K$ in the network. For this computation, any of the earlier solution algorithms for product-form queueing networks can be used.



Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.





Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- ***Step*** 2:

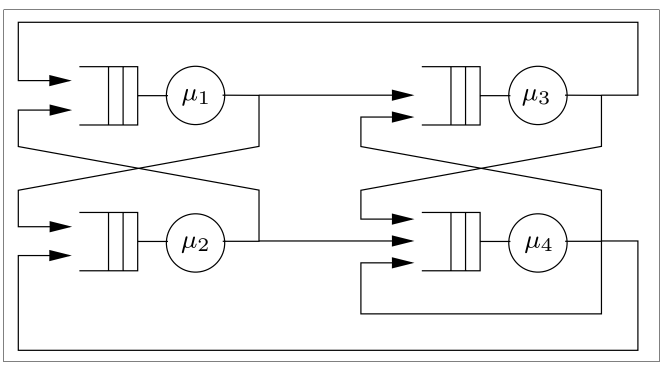
  From the given network, construct an equivalent reduced network consisting only of the chosen node i and the FES node c. The visit ratios in both nodes are e_i. The load-dependent service rate of the FES node is the throughput along the short-circuit path when there are k jobs in the network, that is: $\mu_c(k) = \lambda_i^{sc}(k)$ for $k = 1, \ldots, K$.

- ***Step*** 3:

  Compute the performance measures in the reduced network with any suitable algorithm for product-form networks (e.g., convolution or MVA).

© Gunter Bolch • Universität Erlangen-Nürnberg • Informatik 4 • 2002
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ **Example**:



➤ Number of jobs: $K = 2$

➤ Service rates: $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 3$; $\mu_4 = 4$

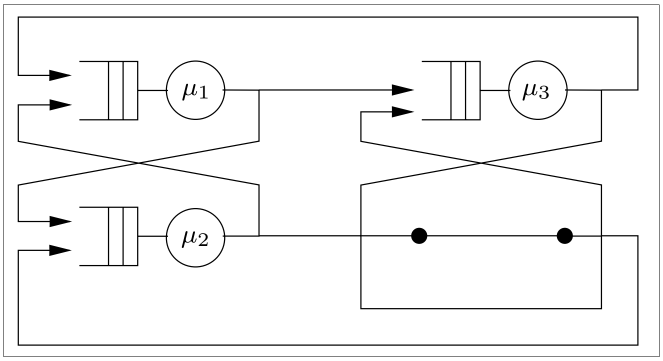
➤ Visit ratios: $e_1 = e_2 = e_3 = 1$; $e_4 = 1.25$

➤ Transition probabilities:

$$p_{12} = 0.5\,, \quad p_{21} = 0.5\,, \quad p_{31} = 0.5\,, \quad p_{42} = 0.4\,,$$
$$p_{13} = 0.5\,, \quad p_{24} = 0.5\,, \quad p_{34} = 0.5\,, \quad p_{43} = 0.4\,, \quad p_{44} = 0.2\,.$$

© Gunter Bolch • Universität Erlangen-Nürnberg • Informatik 4 • 2002
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- ***Step*** 1:



MVA:

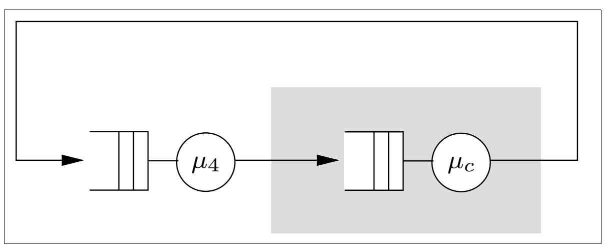
$$\lambda(1) = \underline{0.545}\,, \quad \lambda(2) = \underline{0.776}$$

With e_4 = 1.25 for the short circuit:

$$\lambda_4^{sc}(1) = \underline{0.682}\,, \quad \lambda_4^{sc}(2) = \underline{0.971}$$

© Gunter Bolch • Universität Erlangen-Nürnberg • Informatik 4 • 2002
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- ***Step*** 2: Reduced Network:



With:

$$\mu_c(1) = \lambda_4^{sc}(1) = 0.682\,, \quad \mu_c(2) = \lambda_4^{sc}(2) = 0.971$$

and:

$$e_4 = e_c = 1.25$$

© Gunter Bolch • Universität Erlangen-Nürnberg • Informatik 4 • 2002
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- ***Step*** 3: MVA for load-dependent nodes:

$$\overline{T}_4(2) = \underline{0.286}$$

$$\overline{K}_4(2) = \underline{0.253}$$

$$\lambda_4(2) = \underline{0.885}$$

:

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ **FES-Method for Multiple Nodes:**

➤ Not only one node is short circuited.

➤ The closed product-form network is partitioned in a number of subnetworks.

➤ Each of these subnetworks is analyzed independently from the others

➤ The whole network is analyzed by short-circuiting the nodes that do not belong to the subnetwork that is to be examined.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.