E.4 Markov Chains

◆ The behaviour of many queueing networks can be described by "continuous time **Markov chains**".

◆ A Markov chain (MC) is characterized by the **states** of the underlying queueing network and the **transition rates** between these states.

◆ **Global balance equations** for the MC of a queueing network:

$$\sum_{j \in S} \pi_j q_{ji} = \pi_i \sum_{j \in S} q_{ij}\,, \quad \forall i \in S$$

➤ S: State space (Set of all states of the queueing network)

➤ q_{ij}: Transition rate from state i to state j

➤ π_i: Steady state probability of state i

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ In words:

• total flow **into** state i = total flow **out of** state i

• sum of the transition rates **into** state i = sum of the transition rates **out of** state i

◆ Simplified global balance equations:

$$\forall i \in S: \quad \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} - \pi_i \sum_{j \neq i} q_{ij} = 0$$

◆ Or with the generator matrix:

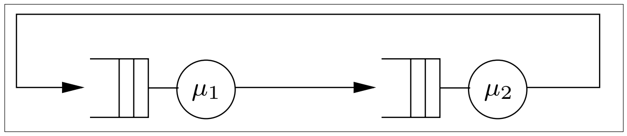
$$\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

➤ π: Vector of the steady state probabilities $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$

➤ $\mathbf{Q}$: Generator matrix with the transition rates q_{ij} and $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Example: Closed tandem network



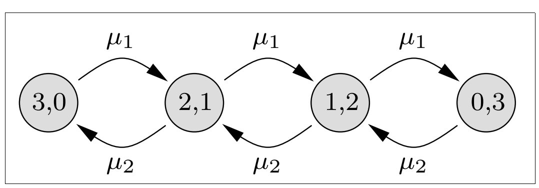
- Number of jobs $K = 3$
- Service rates: $1/\mu_1 = 5$ sec und $1/\mu_2 = 2.5$ sec (exp. distr.)
- Strategy: FCFS
- State space of the MC:

$$\{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$$

- State: $(k_1, k_2) \rightarrow k_1$ jobs in node 1 and k_2 jobs in node 2
- Steady state probability: $\pi(k_1, k_2)$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- State transition diagram or transition diagram:



- Global balance equations, (Markov' system of equation):

$$\begin{aligned} \pi(3,0)\mu_1 &= \pi(2,1)\mu_2 , \\ \pi(2,1)(\mu_1+\mu_2) &= \pi(3,0)\mu_1 + \pi(1,2)\mu_2 , \\ \pi(1,2)(\mu_1+\mu_2) &= \pi(2,1)\mu_1 + \pi(0,3)\mu_2 , \\ \pi(0,3)\mu_2 &= \pi(1,2)\mu_1 . \end{aligned}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Generator matrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

➤ Vector of the steady state probabilities:

$$\pi = (\pi(3,0), \pi(2,1), \pi(1,2), \pi(0,3))$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Generator martrix with $\mu_1 = 0.2$ und $\mu_2 = 0.4$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

➤ Solving the system of equations $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ we obtain the steady state probabilities:

$$\pi(3,0) = \underline{0.5333}, \quad \pi(2,1) = \underline{0.2667}, \quad \pi(1,2) = \underline{0.1333}, \quad \pi(0,3) = \underline{0.0667}$$

➤ From the steady state probabilities we obtain the marginal probabilities:

$$\pi_1(0) = \pi_2(3) = \pi(0,3) = \underline{0.0667}, \quad \pi_1(1) = \pi_2(2) = \pi(1,2) = \underline{0.133},$$
$$\pi_1(2) = \pi_2(1) = \pi(2,1) = \underline{0.2667}, \quad \pi_1(3) = \pi_2(0) = \pi(3,0) = \underline{0.5333}.$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Utilizations:

$$\rho_1 = 1 - \pi_1(0) = \underline{0.9333}, \quad \rho_2 = 1 - \pi_2(0) = \underline{0.4667}.$$

➤ Throughput:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \rho_1\mu_1 = \rho_2\mu_2 = \underline{0.1867}.$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Mean number of jobs:

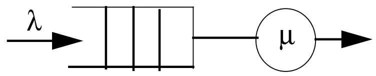
$$\overline{K}_1 = \sum_{k=1}^{3} k\pi_1(k) = \underline{2.2667}, \quad \overline{K}_2 = \sum_{k=1}^{3} k\pi_2(k) = \underline{0.7333}.$$

➤ Mean response times:

$$\overline{T}_1 = \frac{\overline{K}_1}{\lambda_1} = \underline{12.1429}, \quad \overline{T}_2 = \frac{\overline{K}_2}{\lambda_2} = \underline{3.9286}.$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

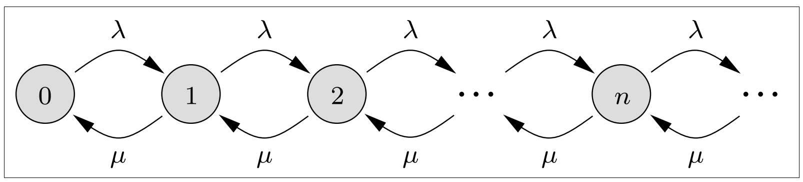
◆ Example: **M/M/1** - system:



➤ State space of the underlying MC:

{0, 1, 2, 3, 4, ... }

➤ Transition diagram:



© Gunter Bolch • Universität Erlangen-Nürnberg • Informatik 4 • 2002
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Vector of the steady state probabilities:

$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, ...)$

➤ Generator matrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

➤ Global balance equations, (Markov' system of equation):

$$0 = -\pi_0\lambda + \pi_1\mu\,,$$
$$0 = -\pi_k(\lambda+\mu) + \pi_{k-1}\lambda + \pi_{k+1}\mu\,, \quad k \ge 1$$

© Gunter Bolch • Universität Erlangen-Nürnberg • Informatik 4 • 2002
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Steady state probabilities π_1 and π_2 :

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0\,, \qquad \pi_2 = \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot \mu}\pi_0$$

➤ In general:

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0$$

➤ Using the normalizing condition:

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Using $\rho = \lambda/\mu$:

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

➤ Steady state probabilities of a M/M/1 - system:

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k$$

➤ Utilization of a M/M/1 - system:

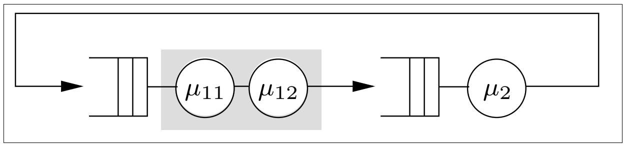
$$\rho = 1 - \pi_0$$

➤ Mean number of jobs in a M/M/1 - system:

$$\overline{K} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ **Closed Tandem network** with **E_2**-distributed service time in one server:



- Number of jobs: $K = 2$
- Service times:
  - Server 2: exp. distribution with $\mu_2 = 0.4$
  - Server 1: E_2-distr. with the rates of the two phases $\mu_{11} = \mu_{12} = 0.4$
- State of the network is given by the number of jobs in the nodes and by the phase $l = 0, 1, 2$ of the job in node 1:

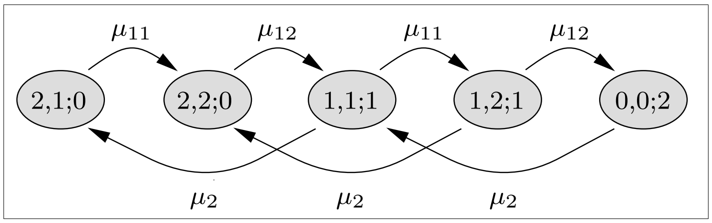
  $(k_1, l; k_2)$

- Steady state probability of the network:

  $p(k_1, l; k_2)$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- Transition diagram:



- Global balance equations, (Markov' system of equations):

$$\begin{aligned}
\pi(2,1;0)\mu_{11} &= \pi(1,1;1)\mu_2\,,\\
\pi(2,2;0)\mu_{12} &= \pi(2,1;0)\mu_{11} + \pi(1,2;1)\mu_2\,,\\
\pi(1,1;1)(\mu_{11}+\mu_2) &= \pi(2,2;0)\mu_{12} + \pi(0,0;2)\mu_2\,,\\
\pi(1,2;1)(\mu_{12}+\mu_2) &= \pi(1,1;1)\mu_{11}\,,\\
\pi(0,0;2)\mu_2 &= \pi(1,2;1)\mu_{12}\,.
\end{aligned}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Generator matrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu_{11} & \mu_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{12} & \mu_{12} & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_{11}+\mu_2) & \mu_{11} & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\mu_{12}+\mu_2) & \mu_{12} \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

➤ Generator matrix with the values of the service rates:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & -0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & -0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Solving $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ or with the global balance equations:

$$\begin{aligned} &\pi(2,1;0) = \underline{0.2219}, \quad \pi(2,2;0) = \underline{0.3336}, \\ &\pi(1,1;1) = \underline{0.2219}, \quad \pi(1,2;1) = \underline{0.1102}, \\ &\pi(0,0;2) = \underline{0.1125}. \end{aligned}$$

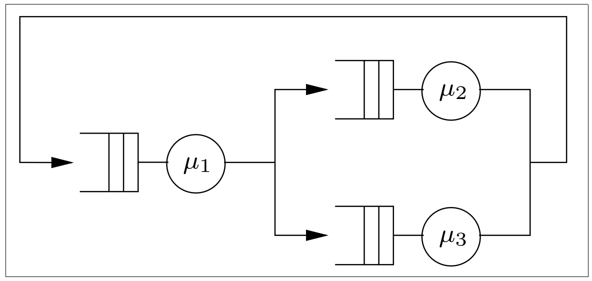
➤ Marginal probabilities:

$$\begin{aligned} \pi_1(0) = \pi_2(2) &= \pi(0,0;2) = \underline{0.1125}, \\ \pi_1(1) = \pi_2(1) &= \pi(1,1;1) + \pi(1,2;1) = \underline{0.3321}, \\ \pi_1(2) = \pi_2(0) &= \pi(2,1;0) + \pi(2,2;0) = \underline{0.5555}. \end{aligned}$$

➤ Using the marginal probabilities all other performance measures can be calculated.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Example: Simple **closed queueing network:**



- Number of jobs $K = 2$
- Service times: exp. distr. with: $\mu_1 = 4/\mathrm{sec}$, $\mu_2 = 1/\mathrm{sec}$ und $\mu_3 = 2/\mathrm{sec}$
- Strategy: FCFS

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- Routing probabilities:

$$p_{12} = 0.4, \qquad p_{13} = 0.6$$
$$p_{21} = p_{31} = 1$$

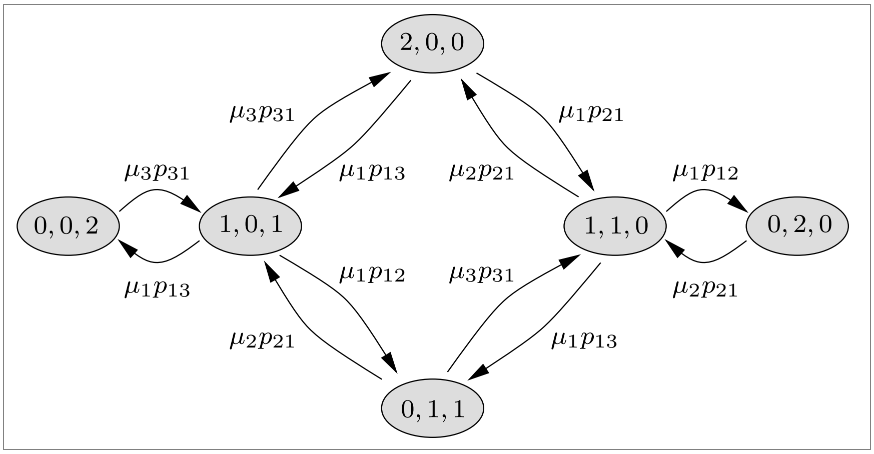
- State space of the MC:

$$\{(2, 0, 0),\ (0, 2, 0),\ (0, 0, 2),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\}$$

- State: $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow k_1$ jobs in node 1, k_2 jobs in node 2 und k_3 jobs in node 3
- Steady state probability: $\pi(k_1, k_2, k_3)$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Transition diagram:



Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Global balance equations:

$$
\begin{aligned}
&(1) & \pi(2,0,0)(\mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) &= \pi(1,0,1)\mu_3 p_{31} + \pi(1,1,0)\mu_2 p_{21}\,, \\
&(2) & \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} &= \pi(1,1,0)\mu_1 p_{12}\,, \\
&(3) & \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} &= \pi(1,0,1)\mu_1 p_{13}\,, \\
&(4) & \pi(1,1,0)(\mu_2 p_{21} + \mu_1 p_{13} + \mu_1 p_{12}) &= \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12} \\
& & &\quad + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31}\,, \\
&(5) & \pi(1,0,1)(\mu_3 p_{31} + \mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) &= \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} + \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} \\
& & &\quad + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13}\,, \\
&(6) & \pi(0,1,1)(\mu_3 p_{31} + \mu_2 p_{21}) &= \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13} + \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12}\,.
\end{aligned}
$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

Solving the Global Balance Equations:

Iterative method:

- Global Balance Equation: $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$
- Multiplication with a Scalar: $\pi\mathbf{Q}\Delta = \mathbf{0}$
- Addition of π on both sides: $\pi\mathbf{Q}\Delta + \pi = \pi$
- Using the matrix $\mathbf{I}$: $\pi(\mathbf{Q}\Delta + \mathbf{I}) = \pi$
- Iteration: $\pi^{(j+1)} = \pi^{(j)}(\mathbf{Q}\Delta + \mathbf{I})$
- Δ is chosen, that the method converges:

$$\Delta = 1/\max|q_{ii}| \quad \text{oder} \quad \Delta = 0.99/\max|q_{ii}|$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

Example: **Tandem network**:

- Generator matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}$$

- Scalar Δ:

$$\Delta = \frac{1}{\max|q_{ii}|} = \frac{1}{0.6} = \underline{1.6667}$$

- Invariant Matrix:

$$(Q\Delta + I) = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0.6667 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Starting vector can be chosen arbitrarily:

$$\pi^{(0)} = (\pi(3,0), \pi(2,1), \pi(1,2), \pi(0,3))^{(0)}$$

Normalizing condition:

$$\pi(3,0) + \pi(2,1) + \pi(1,2) + \pi(0,3) = 1$$

➤ Starting vector wird:

$$\pi^{(0)} = (0.65; 0.35; 0; 0)$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

Iteration	$\pi(3,0)$	$\pi(2,1)$	$\pi(1,2)$	$\pi(0,3)$
1	0.6667	0.2166	0.1167	0
2	0.5889	0.3000	0.0722	0.0389
3	0.5926	0.2444	0.1259	0.0371
4	0.5580	0.2815	0.1062	0.0543
5	0.5597	0.2568	0.1300	0.0535
6	0.5443	0.2733	0.1213	0.0612
7	0.5450	0.2623	0.1319	0.0608
8	0.5382	0.2696	0.1280	0.0642
9	0.5385	0.2647	0.1327	0.0641
10	0.5355	0.2680	0.1309	0.0656
11	0.5356	0.2658	0.1330	0.0655

➤ Exact values:

$$\pi(3,0) = \underline{0.5333}, \pi(2,1) = \underline{0.2667}, \pi(1,2) = \underline{0.1333}, \pi(0,3) = \underline{0.0667}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- The iterative method can be always applied, but needs very much computing time and memory

- Other methods (faster and need less memory):
  - Stationary methods:
    - Power method
    - Jakobi method
    - Gauß-Seidel-method
    - Multi-level-method
  - Transient method:
    - Uniformization

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

Transient Solution of the Global Balance Equations:

- Global balance equations: $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ valid only for the stationary state

- In the transient state we have:

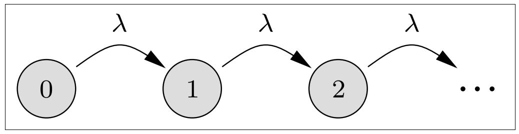
$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)\mathbf{Q}, \quad \pi(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \ldots)$$

  - In the transient case is the difference between "the flow **into** a state" and the "flow **out of** this state" the derivation of the state probability of this state.

  - Solution very difficult (Uniformization!).

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

◆ Example: Birth process (e.g. arrivals at a queueing system):



➤ Generator matrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

➤ Balance equations:

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t)\,,$$
$$\frac{d}{dt}\pi_k(t) = -\lambda\pi_k(t) + \lambda\pi_{k-1}(t)\,, \quad k \geq 1$$

➤ Starting conditions:

$$\pi_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.

- State probability of the birth process (Poisson process, Poisson distribution):

$$\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0$$

- Probability, that in time t k birth' have occured (k jobs are arrived)

- Probability, that in time t birth (arrival) occured $P(T_A > t)$:

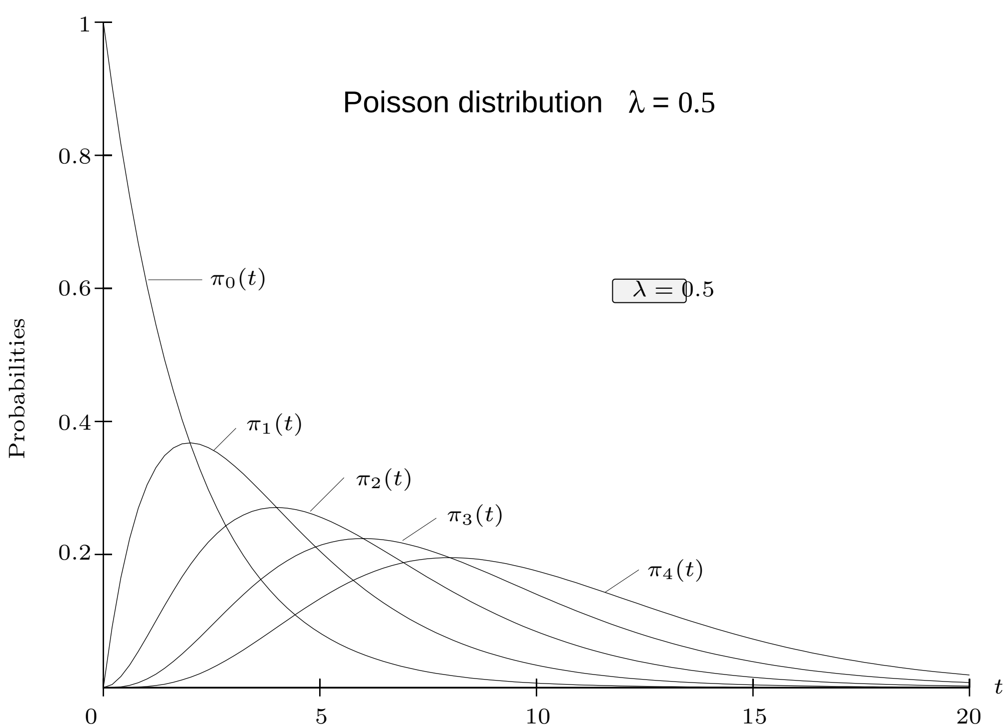
$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- Distribution of the time between two birth' (arrivals):

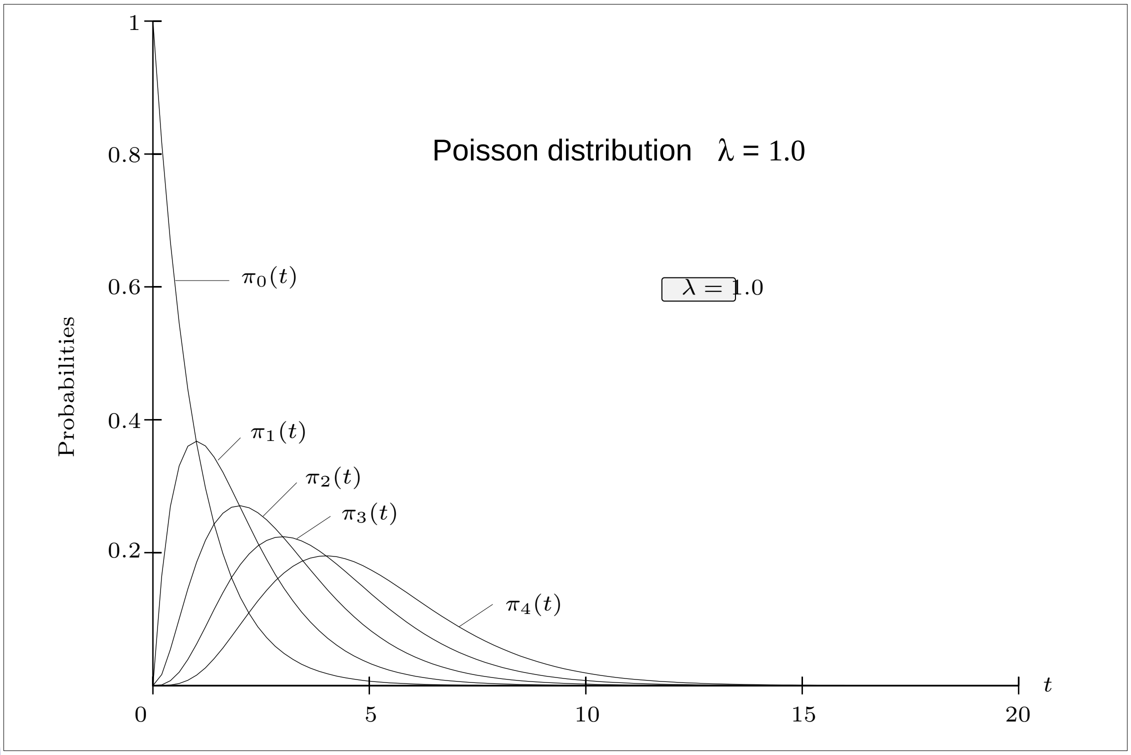
$$P(T_A \leq t) = 1 - \pi_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Inter arrival time is exp. distributed !!

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.



Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.



Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage, außer zu Lehrzwecken an der Universität Erlangen-Nürnberg, bedarf der Zustimmung des Autors.