Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

G. Bolch, M. Abu El-Qomsan

Universität Erlangen-Nürnberg
Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung (IV)
Martensstraße 1
91058 Erlangen

bolch@informatik.uni-erlangen.de
mdabukam@informatik.uni-erlangen.de

Übersicht

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen, d.h. Knoten mit mehreren Bedieneinheiten, die unterschiedliche Bedienraten besitzen.

Zunächst werden asymmetrische Warteschlangennetze mit einer Auftragsklasse und symmetrische Warteschlangennetze mit mehreren Auftragsklassen betrachtet und Lösungsansätze zur Berechnung der Leistungsgrößen vorgestellt.

Anschließend erfolgt eine Erweiterung auf asymmetrische Warteschlangennetze mit mehreren Auftragsklassen. Zur Bearbeitung von geschlossenen Netzen werden die Summationsmethode, die Mittelwertanalyse und der SCAT-Algorithmus geeignet erweitert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

In der Warteschlangentheorie erfolgt die Analyse eines Netzes unter Zuhilfenahme wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlagen.

Ein Rechnersystem besteht aus Komponenten, wo jede Komponente im Warteschlangennetz durch einen Knoten repräsentiert wird. Ein Knoten besteht aus einer Warteschlange und einer Bedieneinheit (sog. *single-server)* oder mehreren Bedieneinheiten *(sog. multiple-server).* Die Zwischenankunftszeiten und Bedienzeiten werden durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben.

Im Falle multiple-server kann jede Bedieneinheit gleiche Bedienrate (*sog. symmetrischen Multiple-Server*) oder unterschiedliche Bedienrate (*sog. asymmetrischen Multiple-Server*) besitzen. Häufig hat man mit asymmetrischen Multiple-Servern zu tun.

Es gibt offene und geschlossene Warteschlangennetzen mit einer oder mehreren Auftragsklassen.

In dieser Arbeit geht es um Erweiterung der Algorithmen der Summationsmethode, Mittelwertanalyse und SCAT von geschlossenen Warteschlangennetzen mit mehreren Auftragsklassen.

Die Erweiterung von Warteschlangennetzen mit symmetrischen Knoten und einer Auftragsklasse zu asymmetrischen Knoten und einer Auftragsklasse von [BoBr 92] und [Rog 92], und die Erweiterung von Warteschlangennetzen mit symmetrischen Knoten und einer Auftragsklasse zu mehreren Auftragsklassen von [Hahn 90], [BaTh94] und [Bolc 89] wird zusammengefaßt und auf die beschriebene Fragestellung angewendet.

1.2 Warteschlangennetze und die charakteristischen Leistungsgrößen vonWarteschlangensystemen

Ein Warteschlangennetz besteht aus mehreren elementaren Knoten. Dabei versteht man unter elementaren Knoten ein Warteschlangensystem mit einer Warteschlange und einer gewissen Anzahl von Bedieneinheiten. Ein Warteschlangensystem wird durch folgende Angaben festgelegt:

λ	Ankunftsrate
μ_i	Bedienrate an Bedieneinheit *i*
c_A	Variationskoeffizient der Verteilung der Ankunftszeit
c_B	Variationskoeffizient der Verteilung der Bedienzeit
ρ	Auslastung
$\overline{\omega}$	die mittlere Wartezeit
$\overline{t}$	die mittlere Antwortzeit
$\overline{q}$	bezeichnet die mittlere Warteschlangenlänge
P_m	ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Auftrag bei Eintritt in das System keine freie Bedieneinheit vorfindet und somit in der Warteschlange warten muß.
N	Anzahl der Knoten im Netz
R	Anzahl der Auftragsklassen
$\overline{K}$	Populationsvektor (K_1 ,K_2 ,...,K_R)
K_r	Anzahl der im Netz vorhandenen Aufträge der Klasse r (r = 1,...,R)
K	Gesamtzahl der Auträge im Netz
m_i	Anzahl der Bedieneinheiten in Knoten *i* (*i* = 1,...,N)
μ_{il}	Bedienrate Knoten *i*, Bedieneinheit *l*
c_{Ai}	Variationskoeffizient der Verteilung der Ankunftszeit Knoten *i* (*i* = 1,...,N)
c_{Bi}	Variationskoeffizient der Verteilung der Bedienzeit Knoten *i* (*i*=1,...N;*l*=1,...,m_i)
e_{ir}	mittlere Anzahl der Besuche eines Auftrags der Klasse *r* bei Knoten *i*

p_{ij} Übergangswahrscheinlichkeit von Knoten *i* zu Knoten *j* (*i*, *j* = 1,...,N)

Es gibt offene und geschlossene Warteschlangennetze. In einem geschlossenen Netz kann kein Austausch mit der Umgebung stattfinden, dagegen können bei einem offenen Netz Aufträge von außen ankommen und das Netz wieder verlassen. Hat man mehrere Auftragsklassen, so kann es auch gemischte Netze geben.

Man unterscheidet 4 Typen von Produktformknoten:

Typ-1-Knoten: M/M/m-FCFS
Typ-2-Knoten: M/G/1-PS(RR)
Typ-3-Knoten: M/G/∞ (Infinitive Server)
Typ-4-Knoten: M/G/1-LCFS PR

Die Leistungsgrößen sind:

ρ_{ir} Auslastung des Knotens *i* bei Aufträgen der Klasse *r*

λ_{ir} Durchsatz des Knotens *i* bei Aufträgen der Klasse *r*

$\bar{t}_{ir}$ mittlere Antwortzeit an Knoten *i* bei Aufträgen der Klasse *r*

$\bar{\omega}_{ir}$ mittlere Wartezeit an Knoten *i* bei Aufträgen der Klasse *r*

$\bar{q}_{ir}$ mittlere Warteschlangenlänge an Knoten *i* bei Aufträgen der Klasse *r*

P_{m_i} Wartewahrscheinlichkeit an Knoten *i*

1.3 Untersuchung asymmetrischer Warteschlangensysteme

In diesem Abschnitt werden die elementare Netze nach [BoBr 92] erläutert.

Die Antwortzeit des asymmetrischen Wartesystems hängt nicht nur von einer freien Bedieneinheit ab sondern auch von der Bedieneinheit, die ankommenden Auftrag bedient. In [BoSc 91] ist für diese Problematik folgende Grundüberlegung gemacht worden:

Sei p_k (k = 1,...,m) die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Auftrag von der k-ten Bedieneinheit bearbeitet wird. Die Annahme, daß eine schnellere Bedieneinheit mehr Aufträge bearbeitet als eine langsamere, führt dazu, daß das Verhältnis der p_k zueinander genauso ist, wie das der Bedienraten.

Damit erhält man:

$$p_1 : p_2 : \dots : p_m = \mu_1 : \mu_2 : \dots : \mu_m \tag{1.1}$$

Daraus folgt:

$$p_k = \frac{\mu_k}{\sum_{l=1}^{m} \mu_l} \qquad (1 \le k \le m) \tag{1.2}$$

Für die k-te Bedieneinheit läßt sich die Auslastung mittels ρ_k wie folgt bestimmen:

$$\rho_k = \frac{\lambda p_k}{\mu_k} = \frac{\lambda}{\mu_k} \cdot \frac{\mu_k}{\sum_{l=1}^{m} \mu_l} = \frac{\lambda}{\sum_{l=1}^{m} \mu_l} \qquad (1 \le k \le m) \tag{1.3}$$

Die Auslastung ist also an jeder Bedieneinheit die gleiche, die Gesamtauslastung kann demzufolge wie folgt berechnet werden:

$$\rho = \rho_k \qquad (1 \le k \le m) \tag{1.4}$$

Sei $\bar{x}$ die Bedienzeit einer Bedieneinheit, dann wird $\bar{x}$ wie folgt ermittelt:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{\mu_k} \qquad (1 \le k \le m) \tag{1.5}$$

Die mittlere Bedienzeit wird mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten P_k ermittelt:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{m} p_k \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\mu_k}{\sum_{l=1}^{m} \mu_l} \right) . \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sum_{l=1}^{m} \mu_l} = \frac{m}{\sum_{l=1}^{m} \mu_l} \tag{1.6}$$

In [BoSc 91] wird mit diesen Formeln die Wartezeit W berechnet.

Für asymmetrische M/G/m-Systeme wird folgende Näherung angenommen:

$$W = W_0 + \frac{\bar{q}}{m} \bar{x} \tag{1.7}$$

Mit Hilfe des Satzes von Little wird folgender Satz erreicht:

$$\mathrm{W} = \frac{W}{1-\frac{\lambda\,.\bar{x}}{m}} \tag{1.8}$$

Für die Watezeit gilt:

$$\mathrm{W} = \frac{W_0}{1-\rho} \tag{1.9}$$

wobei

$$\frac{\lambda.\bar{x}}{m} = \frac{\frac{\lambda.m}{\sum_{l=1}^{m}\mu_l}}{m} = \frac{\lambda}{\sum_{l=1}^{m}\mu_l} = \rho$$

Man benötigt die mittlere Restbedienzeit R_k einer Bedieneinheit um W_0 zu ermitteln:

$$\mathrm{R_k} = \frac{\bar{x}_k^{\,2}}{2.\bar{x}_k} \qquad (1 \le k \le m) \tag{1.10}$$

Mit Variationskoeffizient ausgedrückt gilt:

$$\mathrm{R_k} = \frac{\bar{x}_k}{2}.(1+c_B^{\,2}) \tag{1.11}$$

Die Restbedienzeit:

$$\mu_{R_k} = \frac{1}{R_k} = \frac{2}{\bar{x}_k\,(1+c_B^{\,2})} \qquad (\mathrm{k}=1,...,\mathrm{m}) \tag{1.12}$$

Die Gesamt-Restbedienzeit:

$$\mu_R = \sum_{k=1}^{m}\mu_{R_k} = \sum_{k=1}^{m}\frac{2}{\bar{x}_k\,(1+c_B^{\,2})} \tag{1.13}$$

Für die Gesamt-Restbedienzeit $R = \frac{1}{\mu_R}$ ergibt sich:

$$R = \frac{\bar{x}(1+c_B^{\,2})}{2m}\ ; \qquad \text{wobei} \qquad \bar{x} = \frac{m}{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\bar{x}_k}} \tag{1.14}$$

Dann gilt für W_0 folgende Formel:

$$W_0 = \frac{\bar{x}}{2m}\left(1 + c_B^2\right)P_m \tag{1.15}$$

Für symmetrische M/M/m-Systeme gilt:

$$P_{m_i}(\rho_i) = \frac{\dfrac{(m_i\rho_i)^{m_i}}{m_i!(1-\rho_i)}}{\sum\limits_{k=0}^{m_i-1}\dfrac{(m_i\rho_i)^k}{k!} + \dfrac{(m_i\rho_i)^{m_i}}{m_i(1-\rho_i)}} \tag{1.16}$$

Die Auslastung ρ ergibt sich durch:

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k} \tag{1.17}$$

Für die Wartezeit kann man eine Näherung in asymmetrischen M/M/m-Systemen erreichen:

$$W = \frac{P_m \bar{x}}{(1-\rho)m}. \tag{1.18}$$

Für asymmetrische M/G/m-Systeme gilt:

$$W = \frac{P_m \bar{x}}{(1-\rho)} \cdot \frac{(1 + c_B{}^2)}{2m} \tag{1.19}$$

2 Die Summationsmethode

2.1 Die Summationsmethode zur Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Knoten und einer Auftragsklasse

Die Summationsmethode hat als Grundidee, jeden einzelnen Knoten eines zu untersuchenden geschlossenen Warteschlangennetzes durch den Zusammenhang zwischen der mittleren Anzahl von Aufträgen im Knoten und dem Durchsatz durch diesen Knoten zu charakterisieren.

Dieser Zusammenhang kann wie folgt funktional ausgedrückt werden:

$$\bar{k}_i = f_i(\lambda_i) \tag{2.1}$$

Folgende Eigenschaften hat die Funktion f_i mit lastunabhängigen Bedienraten:

Der Definitionsbereich ergibt sich wegen $0 \le \rho_i \le 1$ zu:

* $0 \le \lambda_i \le m_i \mu_i$ Für M/G/∞-Knoten gilt: $0 < \lambda_i \le K,\ da\ \ \bar{k}_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ (2.2)
* $f_i(\lambda_i) \le f(\lambda_i + \Delta\lambda_i)$ für $\Delta\lambda_i > 0$ (2.3)
* $f_i(0) = 0$ (2.4)

Bei Knoten mit lastabhängigen Bedienraten ist die Monotoniebedingung im allgemeinen nicht erfüllt. Bei multiple-server-Knoten bleibt sie jedoch erhalten.

Zur Analyse von Produktformnetzen wurden nach [Bolc 89] folgende Funktionen angegeben:

$$\bar{k}_i = \begin{cases} \dfrac{\rho_i}{1 - \frac{K-1}{K}\rho_i} & \text{für Typ} - 1{,}2{,}4\ \text{Knoten} \\ m_i\rho_i + \dfrac{\rho_i}{1 - \frac{K-m_i-1}{K-m_i}\rho_i} P_{m_i} & \text{für Typ} - 1\ \text{Knoten} \\ \dfrac{\lambda_i}{\mu_i} & \text{für Typ} - 3\ \text{Knoten} \end{cases} \tag{2.5}$$

Man erhält aus Gl. (2.5) korrekte Ergebnisse nur für Typ-3 Knoten, während für die anderen Knotentypen die Formeln geeignete Approximationen darstellen.

Dabei leiten sich die approximativen Formeln aus folgender Gleichung:

$$\bar{k}_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \tag{2.6}$$

und dem Korrekturfaktor $\frac{K-1}{K}$ ab. Der Korrekturfaktor wird aufgrund der Tatsache, daß sich bei Auslastung $\rho_i = 1$ alle Aufträge des Netzes beim Knoten i aufhalten, d.h. $\bar{k}_i = K$, motiviert.

Man kann durch die Summation die Funktionsgleichungen für das gesamte System erhalten:

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{k}_i = \sum_{i=1}^{N} f_i(\lambda_i) = K \tag{2.7}$$

wenn die Funktionen f_i für alle Knoten *i* gegeben sind.

Der Gesamtdurchsatz λ des Netzes kann mit der Beziehung $\lambda_i = \lambda.e_i$ folgendermaßen

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(\lambda \ .e_i) = g(\lambda) = K \tag{2.8}$$

bestimmt werden.

Damit man daraus einen Algorithmus zur Berechnung von allgemeinen Warteschlangennetzen bestimmen kann, muß man unbedingt einen passenden Startwert für λ finden:

$$\lambda := \frac{\lambda_U + \lambda_O}{2} \tag{2.9}$$

$\lambda_U = 0$, wobei λ_U die untere Grenze für den Durchsatz ist.

λ_O ist die obere Grenze für den Durchsatz:

$$\lambda_O = \begin{cases} \min\limits_i \left(\dfrac{m_i . \mu_i}{e_i} \right) & falls \quad m_i \neq \infty \\ \min\limits_i \left(\dfrac{K . \mu_i}{e_i} \right) & falls \quad m_i = \infty \end{cases} \tag{2.10}$$

So kann man mit hilfe von λ die Funktionen f_i für jeden Knoten *i* berechnen.

Wenn g(λ) = K±ε erfüllt ist, dann endet das Verfahren, und die Leistungsgrößen des Netzes können berechnet werden.
Ist g(λ) > K, wird $\lambda_0 = \lambda$ gesetzt. Ist g(λ) < K, dann gilt $\lambda_U = \lambda$, und man beginnt wieder mit einer neuen Berechnung von λ.

ε gibt einen Toleranzbereich an, da g(λ) durch Rundungsfehler selten genau den Wert K erreicht, und der Algorithmus sonst in eine Endlosschleife laufen würde.

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_O & falls \quad g(\lambda) > K \\ \lambda_U & falls \quad g(\lambda) < K \end{cases}$$

Die Funktion f_i für Knotentyp M/M/m-FCFS ist in [Bolc 89] folgendermaßen angegeben:

$$f_i(\lambda_i) = \begin{cases} m_i\rho_i + \dfrac{\rho_i}{1 - \dfrac{K - m_i - 1}{K - m_i}\rho_i} P_{m_i} & \textit{für } M / M / m - FCFS \textit{ Knoten} \\ m_i\rho_i + \dfrac{\rho_i}{1 - \dfrac{K - m_i - a}{K - m_i}} aP_{m_i} & \textit{für } M / G / m - FCFS \textit{ Knoten} \end{cases} \quad (2.11)$$

, wobei a = $\dfrac{c_{B_i}^{\ 2} + 1}{2}$ und $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{m_i \mu_i}$

Um Gl. (2.11) auf asymmetrischen Fall zu übertragen, wurde in [BoBr 92] P_m für den asymmetrischen Fall hergeleitet, in dem die Auslastung ρ mit Gl. (1.17) ausgedrückt wird.

In [Rogg 92] wird ρ_i für asymmetrischen Knoten wie folgt beschrieben:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{l=1}^{m_i} \mu_{il}} \quad (2.12)$$

Der Faktor a und die Korrekturfaktoren $\dfrac{K - m - 1}{K - m}$ *bzw.* $\dfrac{K - m - a}{K - m}$ werden trotz der Asymmetrie nicht beeinflußt.

In [BoBr 92] wurde die Initialisierung des Durchsatzes für asymmetrischen Knoten wie folgt ermittelt:

$$\lambda_O = \min_i \left(\frac{\sum_{i=1}^{m_i} \mu_{il}}{e_i} \right) \qquad (i = 1,...,N) \qquad (2.13)$$

2.2 Die Summationsmethode zur Analyse von Warteschlangennetzen mit symmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

2.2.1 Das Newtonsche Einzelschrittverfahren

In diesem Abschnitt geht es um ein geschlossenes Warteschlangennetz mit N Knoten, R Auftragsklassen (R≥ 1) und $\underline{K} = (K_1, K_2, ..., K_R)$ Aufträge.

Als grundlegender funktionaler Zusammenhang zwischen der mittleren Anzahl an Aufträgen der Klasse r im Knoten i und dem Durchsatz hat man folgende Form ermittelt:

$$\overline{k}_{ir} = f_{ir}(\lambda_{ir}) \qquad (2.14)$$

Dieser Formel bedeutet, daß wenn der Durchsatz groß ist, so ist auch die mittlere Auftragszahl groß und umgekehrt.

Für die Knoten, für die $0 \leq \lambda_{ir} \leq \mu_{ir} K_r$ gilt, ergibt sich für den funktionalen Zusammenhang:

$$\overline{k}_{ir} = \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}} \qquad (2.15)$$

Für die verschiedenen Knoten-Typen gilt:

$$\overline{k}_{ir} = \begin{cases} \dfrac{\rho_{ir}}{1 - \dfrac{K-1}{K}\rho_i} & Typ-1{,}2{,}4 \\ m_i \rho_{ir} + \dfrac{\rho_{ir}}{1 - \dfrac{K-m_i-1}{K-m_i}} P_{mi}(\rho_i) & Typ-1 \\ \dfrac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}} & Typ-3 \end{cases}$$

(2.16)

wobei: $$K = \sum_{r=1}^{R} K_r \quad ; \qquad a = \frac{c_{ir}^2 + 1}{2} \quad ; \qquad \rho_i = \sum_{r=1}^{R} \rho_{ir} \qquad (2.17)$$

Die approximativen Formeln für Typ-1,2,4-Knoten in Gl. (2.16) leiten sich aus der Beziehung:

$$\overline{k}_{ir} = \frac{\rho_{ir}}{1 - \rho_i} \qquad (2.18)$$

und $\dfrac{K-1}{K}$ ab.

Man kann die R Systemgleichungen für das gesamte Netz gewinnen, wenn die Funktionen f_{ir} für alle N Knoten und R Auftragsklassen gegeben sind.

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{k}_{ir} = \sum_{i=1}^{N} f_{ir}(\lambda_{ir}) = K_r \qquad \text{(r = 1,2,...,R)} \tag{2.19}$$

Mit der Beziehung

$$\lambda_{ir} = \lambda_r . e_{ir}$$

ergeben sich aus Gl. (2.19) R Gleichungen zur Bestimmung der Gesamtdurchsätze λ_r :

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ir}(\lambda_{ir}) = g_r(\lambda_r) = K_r \tag{2.20}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (2.20) wurde in [Hahn 90] das Newtonsche Einzelschrittverfahren verwendet. Dieses Verfahren gilt als Standardlösungsmethode für nichtlineares Gleichungssystem. Für seine Anwendbarkeit spielt die spezielle Struktur des Systemgleichungen keine Rolle.

Die Gleichungen des zu lösenden Systems müssen nichtlinear und mindestens einmal stetig differenzierbar sein.

Ist das System von m Gleichungen der Art:

$$h_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \qquad \text{(j = 1,2,...,m)} \tag{2.21}$$

mit der Eigeschaft:

$$\frac{\delta h_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\delta x_j} \neq 0 \qquad \text{(j = 1,2,...,m)} \tag{2.22}$$

gegeben, so ergibt sich aus der Beziehung:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \frac{h_j(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)}, x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)})}{\frac{\delta k_j(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)} - x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)})}{\delta x_j}} \tag{2.23}$$

der (k+1)-te Näherungsvektor ($k \geq 0$)

$$x^{(k+1)} = x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_m^{(k+1)} \qquad aus \ \ \underline{x}^{(k)}$$

Das bedeutet, daß Gl. (2.21) für jeden Index j als Gleichung mit einer unbekannten x_j betrachtet und mit dem Verfahren von Newton für den eindeminsionalen Fall gelöst wird. Der Schnittpunkt der an der Stelle $x_j^{(k)}$ an die Funktion h_j angelegten Tangente mit der x-Achse wird vom Wert $x_j^{(k)}$ dargestellt.

Das Newtonsche Einzelschrittverfahren wird zur Lösung der R Sytemgleichungen:

$$h_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_R) := K_r - \sum_{i=1}^{N} f_{ir}(\lambda_1,\ldots,\lambda_R) = 0 \quad (r = 1,2,\ldots,R) \tag{2.24}$$

verwendet, um die Konvergenz des Newtonschen Einzelschrittverfahrens für f_{ir} mit asymptotischen Sprungstellen zu garantieren, wird jede der Gleichungen $h_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_R)$ mit dem Hauptnenner aller Funktionen multipliziert. Eine ausführlichere Beschreibung findet sich in [Hahn 90].
Durch Anwendung des Newtonschen Einzelschrittverfahren werden die Durchsätze λ_r (r = 1,2,...,R) wie folgt bestimmt:

$$\lambda_r^{(k+1)} := \lambda_r^{(k)} - \frac{h_r^n(\lambda_1^{(k+1)},\ldots,\lambda_{r-1}^{(k+1)},\lambda_r^{(k)},\lambda_{r+1}^{(k)},\ldots,\lambda_R^{(k)})}{\dfrac{\delta\, h_r^n(\lambda_1^{(k+1)},\ldots,\lambda_{r-1}^{(k+1)},\lambda_r^{(k)},\lambda_{r+1}^{(k)},\ldots,\lambda_R^{(k)})}{\delta\,\lambda_r}} \tag{2.25}$$

2.2.2 Fixpunktiteration

Als Alternative zum Newtonschen Einzelschrittverfahren stellt sich die Fixpunkt-iteration [s. BaTh 94] dar.

Zunächst werden die Grundlagen der Fixpunktiteration [s. Schw 88] vorgestellt, bevor diese dann auf die auftretenden Gleichungen der Summationsmethode angewendet wird.

Eine große Klasse von Iterationsverfahren hat der Form:

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{2.26}$$

wobei $x^{(k)}$ eine reelle Zahl und *f(x)* eine Abbildung der betreffenden Menge in sich darstellt.

Mit Gl. (2.26) wird zu einem gegebenen Startwert $x^{(0)}$ eine Folge von Iterationen $x^{(k)}$ definiert mit dem Ziel, die Gleichung:

$$x = f(x) \tag{2.27}$$

zu lösen. Die gesuchte Lösung x stellt einen Fixpunkt der Abbildung *f (x)* dar, und deshalb bezeichnet man Gl. (2.27) als Fixpunktgleichung.

Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum, weiter sei $f: M \rightarrow M$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es existiert eine reelle Konstante L (Kontraktionskonstante) mit 0<L<1, derart, daß gilt:

$$\bigwedge_{x\in M}\bigwedge_{y\in M} d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y) \qquad (2.28)$$

Es sei M eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes N und $f: M \to M$ eine kontrahierende Abbildung (0<L<1). Dann gelten:

1) Die Abbildung f besitzt genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in M$.
2) Für jeden Startwert $x^{(0)} \in M$ konvergiert die durch Gl. (2.26) definierte Folge $x^{(k)}$ gegen den Fixpunkt, dann gilt:

$$x_n \to x \qquad (n \to \infty)$$

3) Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$d(\bar{x} - x^{(k)}) \leq \frac{L}{1-L} d(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \qquad (2.29)$$

Um das nichtlineare Gleichungssystem (2.20) lösen zu können, müssen die Systemgleichungen zunächst in eine entsprechende Form der Gl. (2.26) gebracht werden. Somit hat man die Lösung des nichtlinearen Gleichungsystems (2.20) auf die Lösung eines Fixpunktproblems zurückgeführt.

Die Struktur der Knotengleichungen $f_{ir} = \bar{k}_{ir}$ erlaubt auf jeder rechten Seite der R Systemgleichungen jeweils genau eine der Variablen λ_r herauszuziehen und auf die linke Seite des Gleichungssystems zu bringen.

$$f_{ix_{ir}} = \frac{1}{\lambda_r} f_{ir} = \frac{\bar{k}_{ir}}{\lambda_r} \qquad (2.30)$$

In [BaTh94] wurden die Gleichungen von (2.30) für alle im Rahmen der der Summationsmethode zulässigen Knotentypen in eine Tabelle zusammengefaßt.

Typ	$f_{ix}(i,r) = \dfrac{\bar{k}_{ir}}{\lambda_r}$
M/M/1,M/G/1-PS	$\dfrac{\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{1-\frac{K}{K-1}\rho_i}$
M/M/m	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}} + \dfrac{\frac{e_{ir}}{m_i \cdot \mu_{ir}}}{1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\rho_i} P_{m_i}(\rho_i)$
M/G/∞-IS	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}$
M/G/m-FCFS	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}} + \dfrac{\frac{e_{ir}}{m_i \cdot \mu_{ir}}}{1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\rho_i} a.P_{m_i}(\rho_i)$

M/M/1-PRE	$\dfrac{e_{ir}\sum_{l=1}^{r}\frac{\rho_{il}}{\mu_{il}}+(1-\sigma_{ir+1})\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{(1-\frac{K-1}{K}\sigma_{ir})(1+\frac{K-1}{K}\sigma_{ir+1})}$
M/M/1-NONPRE	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\dfrac{e_{ir}\sum_{l=1}^{r}\frac{\rho_{il}}{\mu_{il}^{2}}\lambda_l}{(1-\frac{K-2}{K-1}\sigma_{ir})(1+\frac{K-2}{K-1}\sigma_{ir+1})}$
M/G/1-PRE	$\dfrac{\frac{1}{2}e_{ir}\sum_{l=1}^{r}\alpha_2(B_{il})+(1-\sigma_{ir+1})\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{(1-\frac{K-a}{K}\sigma_{ir})(1+\frac{K-a}{K}\sigma_{ir+1})}$
M/G/1-NONPRE	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\dfrac{\frac{1}{2}e_{ir}\sum_{l=1}^{r}e_{il}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-1-a}{K}\sigma_{ir})(1+\frac{K-1-a}{K}\sigma_{ir+1})}$
M/M/m-PRE	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\dfrac{\mu_{ir}}{\lambda_r}\left[\dfrac{P_{m_i}(\sigma_{ir+1})\sum_{l=1}^{r}\frac{e_{il}}{m_i\mu_{il}^{2}}\lambda_l}{(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}-\dfrac{P_{m_i}(\sigma_{ir})\sum_{l=1}^{r-1}\frac{e_{il}}{m_i\mu_{il}^{2}}\lambda_l}{(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir})}\right]$
M/M/m-NONPRE	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\left[\dfrac{e_{ir}\sum_{l=1}^{R}\frac{\rho_{il}}{m_i\mu_{il}^{2}}}{(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir})(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}\cdot\dfrac{P_{m_i}(\rho_i)}{m_i\rho_i}\right]$
M/G/m-PRE	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\dfrac{\mu_{ir}}{\lambda_r}\left[\dfrac{\frac{1}{2}P_{m_i}(\sigma_{ir+1})\sum_{l=1}^{r}\frac{e_{il}}{m_i}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}-\dfrac{\frac{1}{2}P_{m_i}(\sigma_{ir})\sum_{l=1}^{r-1}\frac{e_{il}}{m_i}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir})}\right]$
M/G/m-NONPRE	$\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\left[\dfrac{\frac{1}{2}e_{ir}\sum_{l=1}^{R}\frac{e_{ir}}{m_i}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir})(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}\cdot\dfrac{P_{m_i}(\rho_i)}{m_i\rho_i}\right]$

Tabelle 2.1 Die Knotengleichungen für die Fixpunktiteration

Damit läßt sich das Gleichungssystem (2.20) in der Form:

$$\lambda_r\sum_{i=1}^{N} f_{ix_{ir}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_R)=K_r \qquad (1\le r\le R)$$

schreiben.

Dann gilt:

$$\lambda_r = \frac{K_r}{\sum_{i=1}^{N} f_{ix_{ir}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_R)} \qquad (1 \le r \le R) \qquad (2.31)$$

2.3 Notwendige Änderungen zur Bearbeitung von asymmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

2.3.1 Das Newtonsche Einzelschrittverfahren

Gegeben sei ein geschlossenes Warteschlangennetz mit N Knoten, R Auftragsklassen $(R \ge 1)$ und $\underline{K} = (K_1,\ldots,K_R)$ Aufträgen.

Die Änderungen, die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommen wurde, bezieht sich im wesentlichen auf Gl. (2.24) und Gl. (2.25).

In beiden Gleichungen hat man K_r und $f_{ir}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_R)$ symmetrisch nach Gl. (2.16) und Gl. (2.19) ausgedrückt.

Hier geht es um Ermittlung des asymmetrischen Falles, daher wird P_m in K_r und in $f_{ir}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_R)$ vom symmetrischen Fall auf den asymmetrischen übertragen, indem die Auslastung ρ mit der Gl. (2.12) ausgedrückt wird.
Der Faktor a und die Korrekturfaktoren $\frac{K-1}{K}$ *bzw.* $\frac{K-m-1}{K-m}$ in Gl. (2.16) werden durch die unterschiedlichen Bedienraten an den Knoten nicht beeinflußt.

2.3.2 Iterationsverfahren

Die Erweiterung der Summationsmethode zur Analyse von geschlossenen Warteschlangennetzen mit symmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen erfolgt durch Anwendung der Iterationsverfahren genau wie bei Abschnitt 2.2.2 mit kleinen Änderungen.

Die Tabelle 2.1 wird wie folgt erweitert:

Typ	$f_{ix}(i,r) = \frac{\bar{k}_{ir}}{\lambda_r}$

M/M/1,M/G/1-PS	$\frac{\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{1-\frac{K}{K-1}\rho_i}$
M/M/m	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\frac{\frac{e_{ir}}{.\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijr}}}{1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\rho_i}P_{m_i}(\rho_i)$
M/G/∞-IS	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}$
M/G/m-FCFS	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\frac{\frac{e_{ir}}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijr}}}{1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\rho_i}a.P_{m_i}(\rho_i)$
M/M/1-PRE	$\frac{e_{ir}\sum_{l=1}^{r}\frac{\rho_{il}}{\mu_{il}}+(1-\sigma_{ir+1})\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{(1-\frac{K-1}{K}\sigma_{ir})(1+\frac{K-1}{K}\sigma_{ir+1})}$
M/M/1-NONPRE	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\frac{e_{ir}\sum_{l=1}^{r}\frac{\rho_{il}}{\mu_{il}^{2}}\lambda_l}{(1-\frac{K-2}{K-1}\sigma_{ir})(1+\frac{K-2}{K-1}\sigma_{ir+1})}$
M/G/1-PRE	$\frac{\frac{1}{2}e_{ir}\sum_{l=1}^{r}\alpha_2(B_{il})+(1-\sigma_{ir+1})\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{(1-\frac{K-a}{K}\sigma_{ir})(1+\frac{K-a}{K}\sigma_{ir+1})}$
M/G/1-NONPRE	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\frac{\frac{1}{2}e_{ir}\sum_{l=1}^{r}e_{il}\lambda_l\alpha_2(Bil)}{(1-\frac{K-1-a}{K}\sigma_{ir})(1+\frac{K-1-a}{K}\sigma_{ir+1})}$
M/M/m-PRE	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\frac{\mu_{ir}}{\lambda_r}\left[\frac{P_{m_i}(\sigma_{ir+1})\sum_{l=1}^{r}\frac{e_{il}}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijl}.\mu_{il}}\lambda_l}{(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}-\frac{P_{m_i}(\sigma_{ir})\sum_{l=1}^{r-1}\frac{e_{il}}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijl}.\mu_{il}}\lambda_l}{(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir})}\right]$
M/M/m-NONPRE	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}+\left[\frac{e_{ir}\sum_{l=1}^{R}\frac{\rho_{il}}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijl}.\mu_{il}}}{(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir})(1-\frac{K-m_i-1}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}.\frac{P_{m_i}(\rho_i)}{m_i\rho_i}\right]$

M/G/m-PRE	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} + \frac{\mu_{ir}}{\lambda_r}\left[\frac{\frac{1}{2}P_{m_i}(\sigma_{ir+1})\sum_{l=1}^{r}\frac{e_{il}}{m_i}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir+1})} - \frac{\frac{1}{2}P_{m_i}(\sigma_{ir})\sum_{l=1}^{r-1}\frac{e_{il}}{m_i}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir})}\right]$
M/G/m-NONPRE	$\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} + \left[\frac{\frac{1}{2}e_{ir}\sum_{l=1}^{R}\frac{e_{ir}}{m_i}\lambda_l\alpha_2(B_{il})}{(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir})(1-\frac{K-m_i-a}{K-m_i}\sigma_{ir+1})}\cdot\frac{P_{m_i}(\rho_i)}{m_i\rho_i}\right]$

Tabelle 3.1 Die Knotengleichungen für die Fixpunktiteration

Man drückt ρ_i mit Gl. (2.12) aus.

Die Korrekturfaktoren werden trotz der Asymmetrie nicht beeinflußt.3 Die Mittelwertanalyse

3.1 Die Mittelwertanalyse zur Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Knoten und einer Auftragsklasse

Die Mittelwertanalyse (MWA) wurde von Reiser und Lavenberg zur exakten Analyse geschlossener Warteschlangennetze mit Produktformlösungen entwickelt und in [Bolc89] wie folgt beschrieben:

Die Grundlage der MWA wird von zwei einfachen Gesetzen gebildet:

1. Das Gesetz von Little

$$\bar{k} = \lambda..\bar{t} \tag{3.1}$$

das einen Zusammenhang zwischen der mittleren Auftragszahl, dem Durchsatz und der mittleren Antwortzeit eines Knoten oder des Gesamtsystems herstellt.

2. Das Ankunftstheorem von Reiser und Lavenberg

Für geschlossene Produktformnetze ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag bei Ankunft an Knoten i den Netzwerkzustand $(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_N)$ vorfindet, gleich der Gleichgewichtszustandswahrscheinlichkeit $P(k_1,\ldots,k_i-1,\ldots,k_N)$ des Netzes mit einem Auftrag weniger.

Daher werden in der MWA drei Gleichungen benötigt

1. Eine Gleichung zur Berechnung der mittleren Anzahl von Aufträgen $\bar{k}_i(k)$.
2. Eine Gleichung zur Berechnung des Durchsatzes $\lambda(k)$ im Netz.
3. Eine Gleichung zur Berechnung der mittleren Verweilzeit $\bar{t}_i(k)$ im i-ten Knoten.

Ein Netz wird durch iteratives Vorgehen von k = 1,...,K berechnet. K ist die Anzahl der Aufträge im Netz.

Aus dem Ankunftstheorem wird $\bar{t}_i(k)$ für M/M/1-FCFS Knoten wie folgt ermittelt:

$$\bar{t}_i(k) = \frac{1}{\mu_i}[1 + \bar{k}_i(k-1)] \tag{3.2}$$

Zur Berechnung $\bar{t}_i(k)$ für symmetrische M/M/m-FCFS Knoten gilt folgende Formel:

$$\bar{t}_i(k) = \frac{1}{\mu_i m_i}\left(1 + \bar{k}_i(k-1) + \sum_{j=0}^{m_i-2}(m_i - j - 1)\,p_i(j|\,k-1)\right) \tag{3.3}$$

Dabei bezeichnet $p_i(j|k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im i-ten Knoten j Aufträge bedient werden unter der Bedingung, daß sich K Aufträge im Netz befinden.

$$p_i(j|k) = \frac{e_i\lambda\ (k)}{\mu_i \,.\, j}\,p_i(j-1|k-1) \qquad (j = 1,...,m_i -1) \tag{3.4}$$

$$p_i(0|k) = 1 - \frac{1}{m_i}\left(\frac{e_i\,.}{\mu_i}\,\lambda(k) + \sum_{j=1}^{m_i-1}(m_i - 1)p_i(j|k)\right) \tag{3.5}$$

Zur Berechnung $\bar{t}_i(k)$ für asymmetrische M/M/m-FCFS Knoten gilt folgende Formel:

$$\bar{t}_i(k) = \frac{1}{\sum_{l=1}^{m_i}\mu_{il}}\left(1 + \bar{k}_i(k-1) + \sum_{j=0}^{m_i-2}(m_i - j - 1)\,p_i(j|\,k-1)\right) \tag{3.6}$$

Dabei bezeichnet $p_i(j|k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im i-ten Knoten j Aufträge bedient werden unter der Bedingung, daß sich *k* Aufträge im Netz befinden.

$$p_i(j|k) = \frac{e_i\lambda\ (k)}{\sum_{l=1}^{m_i}\mu_{il}}\,p_i(j-1|k-1) \qquad (j = 1,...,m_i -1) \tag{3.7}$$

μ_{il} bezeichnet die schnellste freie Bedieneinheit und μ_{ij} die langsamste freie Bedieneinheit.

$$p_i(0|k) = 1 - \frac{e_i.\lambda(k)}{\sum_{l=1}^{m_i} \mu_{il}} + \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i-1} (m_i - 1) p_i(j|k) \tag{3.8}$$

3.2 Die Mittelwertanalyse zur Analyse von Warteschlangennetzen mit symmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

Die MWA für geschlossene Produktform-Warteschlangennetze mit symmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen wird in [Bolc 89] wie folgt beschrieben:

Für i = 1,...,N und r = 1,...,R berechnet man die mittlere Antwortzeit bzw. die mittlere Anzahl von Aufträgen der Klasse r in i-ten Knoten:

$$\bar{t}_{ir}(\underline{k}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{ir}} \left[1 + \sum_{s=1}^{R} \bar{k}_{is}(\underline{k} - 1_r) \right] & , falls\, m_i = 1 \qquad Typ-1,2,4 \\ \frac{1}{m_i \, \mu_{ir}} \left[1 + \sum_{s=1}^{R} \bar{k}_{is}(\underline{k} - 1_r) + \sum_{j=0}^{m_i-2} (m_i - j - 1) p_i(j|\underline{k} - 1_r) \right] & , falls\, m_i > 1 \qquad Typ-1 \\ \frac{1}{\mu_{ir}} & \qquad Typ-3 \end{cases} \tag{3.9}$$

für $\underline{k} = \underline{0}, \ldots, \underline{K}$.

$\underline{k} - 1_r = (k_1, \ldots, k_r - 1, \ldots, k_R)$ ist der Populationsvektor bei einem Auftrag weniger in Klasse r ist.

$$\bar{k}_{ir}(\underline{k}) = \lambda_r(\underline{k}).\bar{t}_{ir}(\underline{k}).e_{ir} \tag{3.10}$$

Für j = 1,...,m_i -1 gilt:

$$p_i(j|\underline{k}) = \frac{1}{j} \left[\sum_{r=1}^{R} \frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \lambda_r(\underline{k}) p_i(j-1|\underline{k} - 1_r) \right] \tag{3.11}$$

$$p_i(0|\underline{k}) = 1 - \frac{1}{m_i} \left[\sum_{r=1}^{R} \frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \lambda_r(\underline{k}) + \sum_{j=1}^{m_i-1} (m_i - j) p_i(j|\underline{k}) \right] \tag{3.12}$$

Der Durchsatz für r = 1,...,R gilt wie folgt:

$$\lambda_r(\underline{k}) = \frac{k_r}{\sum_{i=1}^{N} e_{ir}\,\bar{t}_{ir}(\underline{k})} \tag{3.13}$$

3.3 Notwendige Änderungen zur Bearbeitung von asymmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

Die MWA für geschlossene Produktform-Warteschlangennetze mit symmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen kann durch einfache Änderung der geschilderten Verfahrensweise für symmetrische Mehrklassennetze in den nachfolgenden Schritten beschrieben werden:

Sei $\underline{k} = \underline{0}, \ldots, \underline{K}$

Aufgrund Gl. (2.12) werden die Gleichungen im vorigen Abschnitt wie folgt ausgedrückt:

Man berechne für i = 1,...,N und r = 1,...,R die mittlere Antwortzeit bzw. die mittlere Anzahl von Aufträgen der Klasse r in i-ten Knoten:

$$\bar{t}_{ir}(\underline{k}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{ir}}\left[1 + \sum_{s=1}^{R} \bar{k}_{is}(\underline{k} - \underline{1}_r)\right] & , \textit{falls } m_i = 1 \qquad \textit{Typ} - 1{,}2{,}4 \\ \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ijr}}\left[1 + \sum_{s=1}^{R} \bar{k}_{is}(\underline{k} - \underline{1}_r) + \sum_{j=0}^{m_i - 2} (m_i - j - 1)\, p_i(j \mid \underline{k} - \underline{1}_r)\right], & \textit{falls } m_i > 1 \quad \textit{Typ} - 1 \\ \dfrac{1}{\mu_{ir}} & \qquad \textit{Typ} - 3 \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\bar{k}_{ir}(\underline{k}) = \lambda_r(\underline{k}).\bar{t}_{ir}(\underline{k}).e_{ir} \tag{3.15}$$

Für j = 1,...,m_i -1 gilt:

$$p_i(j \mid \underline{k}) = \sum_{r=1}^{R} \frac{e_{ir}}{\sum_{l=1}^{j} \mu_{ilr}} \lambda_r(\underline{k})\, p_i(j - 1 \mid \underline{k} - \underline{1}_r) \tag{3.16}$$

$$p_i(0|\underline{k}) = 1 - \sum_{r=1}^{R} \frac{e_{ir}}{\sum_{l=1}^{m_i} \mu_{ilr}} \lambda_r(\underline{k}) + \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i - 1} (m_i - j) p_i(j|\underline{k}) \tag{3.17}$$

Der Durchsatz $\lambda_r(\underline{k})$ bleibt genau wie in Gl. (3.13), wobei $\bar{t}_{ir}(\underline{k})$ mit Gleicung (3.14) ausgedrückt wird.

4 SCAT-Algorithmus

4.1 Der SCAT-Algorithmus zur Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Knoten und einer Auftragsklasse

In diesem Abschnitt wird die Arbeit von [BoBr 92] erläutert.
Der SCAT-Algorithmus (Self Correcting Approximation Technique) für M/M/m-FCFS Knoten basiert auf den Approximationen für Single-Server von Bard und Schweitzer. Er wurde wegen des sehr großen Verbrauches von Rechenzeit und Speicherplatz bei der MWA entwickelt.

Neben der Schätzung $\bar{k}_i(K-1)$ muß eine Schätzung der Randwahrscheinlichkeiten $p_i(j|k)$ für den symmetrischen M/M/m-FCFS Knoten durchgeführt werden.

$$\bar{t}_i(K) = \frac{1}{m_i \mu_i} \left(1 + \bar{k}_i(K-1) + \sum_{j=0}^{m_i - 2} (m_i - j - 1).\, p_i(j|\, K-1) \right) \tag{4.1}$$

Man kann dadurch die Asymmetrie bestimmen, daß $m_i \mu_i$ durch $\sum_{l=1}^{m_i} \mu_{il}$ ersetzt wird.

$$\bar{t}_i(K) = \frac{1}{\sum_{l=1}^{m_i} \mu_{il}} \left(1 + \bar{k}_i(K-1) + \sum_{j=0}^{m_i - 2} (m_i - j - 1) p_i(j|K-1) \right) \tag{4.2}$$

Wegen der aufwendigen Schätzung der Randwahrscheinlichkeit, benötigt der im vorherigen Abschnitt beschriebene Algorithmus viel Rechenzeit.

Für die mittlere Antwortzeit eines Knoten gilt folgende Formel:

$$\bar{t}_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i}(1+\frac{\bar{k}_i}{m_i}+\frac{P_m(\rho_i)}{m_i}-\rho_i) & , \textit{für } M/M/m-FCFS-Knoten \\ \frac{1}{\mu_i}(1+\frac{\bar{k}_i}{m_i}+\frac{P_m(\rho_i)}{m_i}.\frac{c_{B_i}}{2}-\rho_i) & , \textit{für } M/G/m-FCFS-Knoten \end{cases} \quad (4.3)$$

Um ein starke Verringerung des Rechenaufwandes zu erreichen, hat man in Gl. (4.3) die Wahrscheinlichkeit P_m der Randwahrscheinlichkeit verwendet.

Um den asymmetrischen Fall zu ermitteln, wird die Auslastung ρ in P_m mit Gl. (2.12) ausgedrückt und wird $m_i.\mu_i$ *durch* $\sum_{l=1}^{m_i}\mu_{il}$ in Gl. (4.3) ersetzt.

$$\bar{t}_i = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{l=1}^{m_i}\mu_{il}}(m_i+\bar{k}_i+P_m(\rho_i)-m_i\rho_i) & , \textit{für } M/M/m-FCFS-Knoten \\ \frac{1}{\sum_{l=1}^{m_i}\mu_{il}}(m_i+\bar{k}_i+P_m(\rho_i).\frac{c_{B_i}}{2}-m_i\rho_i) & , \textit{für } M/G/m-FCFS-Knoten \end{cases} \quad (4.4)$$

4.2 Der SCAT-Algorithmus zur Analyse von Warteschlangennetzen mit symmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

Für i = 1,...,N und r = 1,...,R wird die mittlere Antwortzeit eines Auftrages im i-ten Knoten wie folgt berechnet:

für $\underline{k}=\underline{0},\ldots,\underline{K}$ und $\underline{k}-1_r=(k_1,\ldots,k_r-1,\ldots,k_R)$ gilt:

$$\bar{t}_{ir}(\underline{k})=\frac{1}{m_i\mu_{ir}}\left[1+\sum_{s=1}^{R}\bar{k}_{is}(\underline{k}-1_r)+\sum_{j=0}^{m_i-2}(m_i-j-1)p_i(j|\underline{k}-1_r)\right] \quad (4.5)$$

Mit Anwendung der Wartewahrscheinlichkeit gelten folgende Formel:

$$\bar{t}_{ir}(\underline{k}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{ir}}\left[1+\dfrac{\sum_{s=1}^{R}\bar{k}_{is}}{m_i}+\dfrac{P_m(\rho_i)}{m_i}+\rho_i\right] & , \textit{für } M/M/m-FCFS-Knoten \\ \dfrac{1}{\mu_{ir}}\left[1+\dfrac{\sum_{s=1}^{R}\bar{k}_{is}}{m_i}+\dfrac{P_m(\rho_i)}{m_i}\cdot\dfrac{c_{B_i}+1}{2}-\rho_i\right] & , \textit{für } M/G/m-FCFS-Knoten \end{cases} \tag{4.6}$$

4.3 Notwendige Änderungen zur Bearbeitung von asymmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen

Für i = 1,...,N und r = 1,...,R wird die mittlere Antwortzeit eines Auftrages im i-ten Knoten wie folgt berechnet:

für $\underline{k} = \underline{0},\ldots,\underline{K}$ und $\underline{k}-1_r = (k_1,\ldots,k_r-1,\ldots,k_R)$ gilt

$$\bar{t}_{ir}(\underline{k}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijr}}\left[1+\sum_{s=1}^{R}\bar{k}_{is}(\underline{k}-1_r)+\sum_{j=0}^{m_i-2}(m_i-j-1)\,p_i(j|\underline{k}-1_r)\right] \tag{4.7}$$

Mit Anwendung der Wartewahrschnlichkeit gelten folgende Formel:

$$\bar{t}_{ir}(\underline{k}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijr}}\left[m_i+\sum_{s=1}^{R}\bar{k}_{is}+P_m(\rho_i)+\rho_i.m_i\right] & , \textit{für } M/M/m-FCFS-Knoten \\ \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m_i}\mu_{ijr}}\left[m_i+\sum_{s=1}^{R}\bar{k}_{is}+P_m(\rho_i)\cdot\dfrac{c_{B_i}+1}{2}-\rho_i.m_i\right] & , \textit{für } M/G/m-FCFS-Knoten \end{cases} \tag{4.8}$$

Wobei ρ_i mit Gl. (2.13) ausgedrückt wird.

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Warteschlangennetze sowohl mit einer Auftragsklasse als auch mit mehreren Auftragsklassen betrachtet, die aus M/M/m-Knoten und M/G/m-Knoten bestehen.

Zur Lösung dieser Warteschlangennetze existiert eine große Zahl von Lösungsmethoden. In dieser Arbeit werden die Summationsmethode, die Mittelwertanalyse und der SCAT-Algorithmus betrachtet, die alle in [Bolc 89] beschrieben sind.

Zur Erweiterung auf Warteschlangennetze mit asymmetrischen Knoten und mehreren Auftragsklassen wurde wie in [BoBr 92] für den Fall mit einer Auftragsklasse die Grundstruktur der Formeln beibehalten aber die darin vorkommende Auslastung durch die Auslastungsformel für asymmetrischen Knoten ersetzt.

Die damit berechneten Ergebnisse sind approximativ, weil auch die Auslastungsformel approximativ ist. Die Genauigkeit dr Ergebnisse muß daher validiert werden.

Literaturverzeichnis

[BaTh 94] Jörg Barner, Klaus-Christian Thielking
Entwicklung, Implement-ierung und Validierung von analytischen Verfahren zur Analyse von Prioritätsnetzen (Teil I+II) (Studienarbeit an der FAU Erlangen-Nürnberg 1994)

[BoBr 92] Gunter Bolch, Wolfgang Brag
Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Multiple-Servern

[Bolc 89] Gunter Bolch
Leistungsbewertung von Rechensystemen mittels analytischer Warteschlangenmodelle B. G. Teubner Stuttgart 1989

[BoSc 91] Gunter Bolch, Albert Scheuerer
Analytische Untersuchung asymmetrischer prioritätsgesteuerter Wartesysteme

[Hahn 90] Thomas Hahn
Erweiterung und Validierung der Summationsmethode (Diplomarbeit an der FAU Erlangen-Nürnberg 1990)

[Rog 92] Kirsten Roggenkamp
Analyse von Warteschlangennetzen mit asymmetrischen Knoten (Diplomarbeit an der FAU Erlangen-Nürnberg 1992)

[Schw 88] Hans Rudolf Schwarz
Numerische Mathematik B.G. Teubner Stuttgart 1988